Serie

Desarrollo del pensamiento matemático

Nº 7

División

372.7
And.
División
Federación Internacional Fe y Alegría, 2006.
30 p.; 21,5 x 19 cm.
ISBN: 980-6418-77-8
Matemáticas, División.

"En la escuela no hemos elegido un fin, en la escuela hemos elegido un instrumento para llevar nuestro mensaje. No es dando cosas como haremos los hombres. Es haciéndolos hombres por la educación con la cual ellos no necesitarán de las cosas que nosotros les vayamos a regalar. La educación es el manantial de todos los bienes que se pueden tener en este mundo".

Padre José María Vélaz

Equipo editorial

Beatriz Borjas

Dimensión: Desarrollo del pensamiento matemático
Serie: División, número 7
Autor: Martín Andonegui Zabala

Este libro se ha elaborado con el propósito de apoyar la práctica educativa de los cientos de educadores de Fe y Alegría. Su publicación se realizó en el marco del **Programa Internacional de Formación de Educadores Populares** desarrollado por la Federación Internacional Fe y Alegría desde el año 2001.

Diseño y diagramación: Juan Bravo
Portada e ilustraciones: Juan Bravo
Corrección de textos: Beatriz Borjas, Carlos Guédez, Margarita Arribas

Edita y distribuye: Federación Internacional Fe y Alegría.
Esquina de Luneta, Edif. Centro Valores, piso 7, Altagracia,
Caracas 1010-A, Venezuela.
Teléfonos: (58) (212) 5631776 / 5632048 / 5647423
Fax (58) (212) 5645096
web: www.feyalegria.org

© Federación Internacional Fe y Alegría

Depósito Legal: If 603 2006 510 336

Caracas, febrero 2006

Publicación realizada con el apoyo de:
Centro Magis
Instituto Internacional para la Educación Superior
en América Latina y el Caribe (IESALC) - Corporación Andina
de Fomento (CAF)

A modo de

introducción...

...y para desperezarnos un poco, ahí van unas cuestiones sencillas para entrar en materia y en calor. Tratemos de resolverlas antes de seguir adelante.

1. Un reloj adelanta **16** segundos durante el día y retrasa **10** segundos en la noche. Al empezar la mañana del 1° de abril se pone en la hora exacta. ¿Cuál es el primer día en que llegará a tener **3** minutos de adelanto?

2. *¿Cuál es el mayor número menor que **100** tal que, al dividirse entre **23**, produce un resto igual al cociente?*

¿Cuál es el valor de **0,1 : 0,001**?

3. Pedro tiene **43,75** pesos entre monedas de **0,25**; **0,50**; **1**; **2** y **5** pesos. Si tiene el mismo número de monedas de cada tipo, ¿cuántas monedas tiene en total?

La diferencia de dos números naturales es **940** y el cociente exacto del mayor entre el menor es **11**. ¿De qué números se trata?

4. Complete las casillas del siguiente cuadro:

	×		:		= 9
+		+		×	
	+	5	-		= 7
:		:		-	
	+		:		= 1
= 2		=4		= 3	

***5.** Rafael tiene **40** años y la suma de las edades de sus **tres** hijos es **22** años. ¿Dentro de cuántos años la edad de Rafael será igual a la suma de las edades de sus tres hijos?*

6. ¿Cuál es el menor número impar mayor que **1** tal que, al dividirse por **7** ó por **5**, da como resto **1**?

***7.** Se reparten **134** libros en **seis** cajas A, B, C, D, E y F. En cada caja y siguiendo el orden anterior, se va colocando un libro cada vez. ¿En qué caja se depositará el último libro?*

La suma de dos números enteros es **168**; al dividirse el mayor entre el menor se obtiene **7** como cociente y **16** como residuo. ¿Cuáles son los números?

***8.** Un desagüe vacía un depósito de 1 m^3 a razón de **20** litros por minuto. ¿Cuántos desagües iguales al anterior se necesitan para vaciarlo en **10** minutos?*

9. Dada la siguiente disposición numérica bajo las columnas A, B, C, D y E:

A	B	C	D	E
	2	3	4	5
6	7	8	9	
	10	11	12	13
14	15	16	17	
	18……..			

Averiguar en qué columna se hallará el número **641**.

10. *Diariamente llegan al aeropuerto un promedio de **6.480** pasajeros. Cada avión trae **90** pasajeros. ¿Cuál es el promedio de aviones que aterrizan cada hora en el aeropuerto?*

Se ha dividido un número entre **5**. ¿Cuántas veces el dividendo contiene al cociente?

*¿Cuál es el divisor cuando el cociente contiene al dividendo **4** veces?*

Bien, ya tenemos nuestras respuestas, que iremos contrastando con las indicaciones y ejercicios que plantearemos a lo largo de las líneas que siguen.

Y un segundo recordatorio:

La sugerencia que proponíamos en el Cuaderno Nº 1 y que siempre presidirá los demás Cuadernos: vamos a estudiar matemática, pero no lo vamos a hacer como si fuéramos simplemente unos alumnos que posteriormente van a ser evaluados, y ya. No. Nosotros somos docentes –docentes de matemática en su momento– y este rasgo debe caracterizar la forma de construir nuestro pensamiento matemático. ¿Qué significa esto?

- La presencia constante de la meta última de nuestro estudio: alcanzar unos niveles de conocimiento tecnológico y reflexivo, lo cual debe abrir ese estudio hacia la búsqueda de aplicaciones de lo aprendido, hacia el análisis de los sistemas que dan forma a nuestra vida y utilizan ese conocimiento matemático, y hacia criterios sociales y éticos para juzgarlos.

- Construir el conocer de cada tópico matemático pensando en cómo lo enseñamos en el aula, además de reflexionar acerca de cómo nuestro conocer limita y condiciona nuestro trabajo docente. De esta forma, integrar nuestra práctica docente en nuestro estudio.

- Como complemento de lo anterior, construir el conocer de cada tópico matemático pensando en cómo lo podemos llevar al aula. Para ello, tomar conciencia del proceso que seguimos para su construcción, paso a paso, así como de los elementos –cognitivos, actitudinales, emocionales...– que se presenten en dicho proceso. Porque a partir de esta experiencia reflexiva como estudiantes, podremos entender y evaluar mejor el desempeño de nuestros alumnos –a su nivel– ante los mismos temas.

- En definitiva, entender que la matemática es la base de su didáctica: la forma en que se construye el conocimiento matemático es una fuente imprescindible a la hora de planificar y desarrollar su enseñanza.

Y ahora, vamos al tema de este Cuaderno, la división.

1. ¿Qué es la división de números naturales?

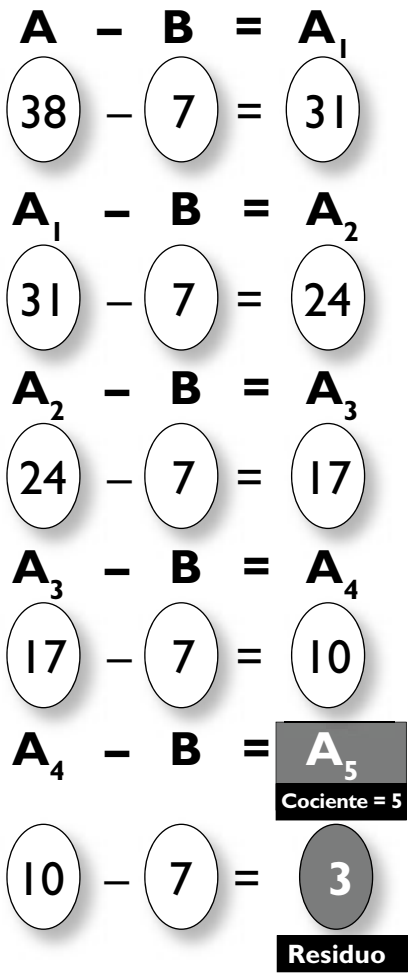
De entrada, nos encontramos con una diferencia sustancial con respecto a las tres operaciones anteriores: adición, sustracción y multiplicación. En esos tres casos se trata de una operación aritmética según la cual a cada par de números naturales se le hace corresponder otro número natural: su suma, su diferencia (si el primer número del par no es menor que el segundo) o su producto, respectivamente.

En el caso de la división de números naturales, no siempre a cada par de números (dividendo y divisor) se le puede

hacer corresponder un solo número natural (cociente): esto sólo ocurre en la división exacta. En el caso más general, se le suele hacer corresponder otro par de números: el cociente y el residuo o resto de la división (Maza, 1991; Vergnaud, 1991). Así, por ejemplo, al par (**38, 7**) se le hace corresponder el par (**5, 3**); al par (**41, 2**), el par (**20, 1**); al par (**15, 23**), el par (**0, 15**); etc. Obsérvese que esta forma general incluye el caso de las divisiones exactas, de residuo 0: al par (**24, 6**) se le hace corresponder el par (**4, 0**).

Pero –aun con esta salvedad– la anterior sigue siendo una manera "formal" de decir las cosas que no nos aclara mucho, ya que debemos precisar cómo es que se divide, es decir, cómo se llega al par (**5, 3**) partiendo de **38** y de **7**.

Para ello vamos a referirnos a dos conjuntos, **A** y **B**, cuyos cardinales son **38** y **7**, respectivamente. Como en el caso de la sustracción, construimos el conjunto **A – B** (complemento de **B** con respecto a **A**), que denotaremos A_1 y cuyo cardinal sería **38 – 7 = 31**. Como el cardinal de A_1 sigue siendo mayor que el de **B**, construimos $A_1 - B$, que denotaremos A_2 y cuyo cardinal sería **31 – 7 = 24**.



De este modo podemos obtener una secuencia de conjuntos A_i hasta llegar a un A_n cuyo cardinal sea menor que **7**. En nuestro caso, la secuencia de tales cardinales continúa así: de A_3, **17**; de A_4, **10**; y de A_5, **3**. ¿Cómo interpretar estos valores finales? El subíndice **5** indica cuántas veces hemos procedido a obtener conjuntos "complementos de… con respecto a …". Este valor se identifica como el cociente de la división. Y el cardinal del último de tales conjuntos, **3**, como el residuo o resto de la división.

Dos precisiones resultan evidentes en este proceso. En primer lugar, el conjunto **B** no puede ser vacío (su cardinal debe ser ≠ **0**), pues en caso contrario el proceso es irrealizable. Y en segundo lugar, el residuo de la división debe ser menor que el divisor, pues en caso contrario la secuencia de conjuntos complementarios quedaría incompleta.

El cociente de dos números naturales representa, pues, el número de veces que el cardinal de un conjunto **B** puede "restarse" del cardinal de un conjunto **A** y de la serie de diferencias sucesivas originadas por tales restas. Y el resto o residuo representa el cardinal del conjunto al que no puede "restarse" ya el cardinal del conjunto **B**.

Si denominamos:
D: cardinal del conjunto **A** (**dividendo**)
d: cardinal del conjunto **B** (**divisor**) (**d ≠ 0**)
c: cociente
r: resto (**r < d**),

en la división de **D entre d**, al par (**D , d**) se le hace corresponder el par (**c , r**) de tal manera que:

$$D = d \times c + r, \text{ con } d \neq 0,\ r < d$$

Los signos habituales para la operación de dividir **D entre d** son:

D : d **D/d** **D ÷ d**

Como puede observarse, esta forma de conceptuar la división corresponde a su apreciación como *una resta reiterada*. Apreciación que, como se ve, tiene su fundamento en la descripción que acabamos de presentar. Sin embargo, existe otra referencia de la división como *operación inversa de la multiplicación*, que corresponde a la forma en que habitualmente suele presentarse por primera vez en el aula.

Esta segunda referencia debe manejarse con cierto cuidado. Es cierto que, por ejemplo, si en la multiplicación **4 x 6 = 24** ocultamos uno de los factores: **4 x ? = 24** y deseamos obtener su valor, procedemos a la división **24 : 4 = 6**. Análogamente, la interrogante **24 : ? = 6** nos remite para su respuesta al conocimiento de la multiplicación **4 x 6 = 24**. En este sentido, ambas operaciones "funcionan" como inversas una de la otra.

Pero si vamos al terreno de los conceptos, ya hemos visto que en la multiplicación a un par de números se le hace corresponder un número, mientras que en la división, se le hace corresponder otro par de números. Aquí no puede hablarse de inversión de operaciones en sentido estricto (Maza, 1991; Vergnaud, 1991).

¿Qué decir, entonces, de la doble consideración de la división como resta reiterada y como operación inversa de la multiplicación? Esto nos recuerda lo que ocurría en el caso de la multiplicación (ver Cuaderno 5), cuando ésta podía considerarse como cardinal del conjunto producto de dos conjuntos o como suma reiterada: el primero de estos enfoques se consideraba *matemáticamente más formal* y el segundo, *pedagógicamente más apto*.

Análogamente, en el caso de la división, el enfoque de *resta reiterada* puede considerarse como *matemáticamente más formal* y el de *operación inversa de la multiplicación*, como *pedagógicamente más apto* para entrar en la división desde el terreno de la multiplicación.

Como vemos, la consideración formal de la división de números naturales requiere ciertas precisiones teóricas que debemos conocer y comprender. Pero esta presentación formal no es, afortunadamente, la única respuesta a la pregunta acerca de qué es esta operación. Porque la división también puede ser vista como un *modelo de situaciones* de la vida diaria, o de situaciones lúdicas, o de otras áreas del saber. En este sentido, la división se convierte en una herramienta que nos permite interpretar matemáticamente las situaciones que se presentan en nuestra vida.

¿Y cuáles, o de qué naturaleza, son estas situaciones para las que la división puede presentarse como modelo? He aquí algunas:

1. Situaciones de *repartir* una cantidad dada entre cierto número de receptores.
2. Situaciones de *restar reiteradamente*.
3. Situaciones de *comparar dos cantidades* con el fin de *averiguar cuántas veces una contiene a –o está contenida en– la otra*.
4. Situaciones de *hallar el valor de algún atributo* (medida, peso, costo…) *de una unidad*, conociendo el de un conjunto de unidades similares.
5. Situaciones de *obtener una cantidad* que sea *un cierto número de veces menor* que otra.
6. Situaciones de *averiguar el número de grupos* de determinado tamaño que se encuentran en un conjunto conocido.

7. Situaciones de *averiguar el tamaño de cada grupo*, cuando se sabe cuántos similares hay en un conjunto conocido.

Estas situaciones suelen venir caracterizadas –en la interpretación verbal que de ellas hace el sujeto– por expresiones tales como repartir, hacerlo tantas veces menor, hallar la mitad o la enésima parte, averiguar cuántas veces algo es mayor o menor que otra cantidad, y los propios de cada situación particular.

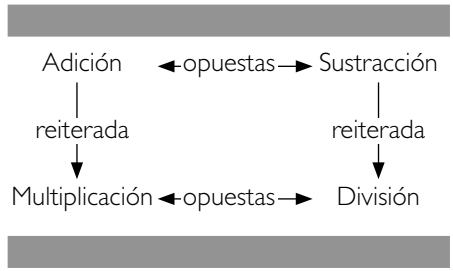
En resumen, también hay dos formas de considerar la división: como un *modelo de situaciones de la vida diaria* y como un *objeto de estudio formal* dentro de la matemática.

No hay contradicción entre ambas formas de considerar la división, sino más bien complementariedad. Pero sí conviene resaltar que en el proceso de adquisición del concepto, de los procedimientos y de las destrezas propias de la operación, es preferible entrar por la vía del modelo de situaciones –y particularmente por las que hacen referencia a la perspectiva de operación en cierto modo inversa de la multiplicación– y considerar el estudio formal –con su lenguaje específico– como una meta a alcanzar posteriormente.

Finalizamos este primer apartado con dos reflexiones. La primera es similar a la que hacíamos en el caso de la sustracción (ver Cuaderno 4). Allí decíamos que esa operación no es "interna" en el conjunto de los números naturales, es decir, que no siempre al restar dos de tales números se obtiene otro número natural. Y agregábamos que había que esperar al conjunto de los números enteros (positivos y negativos) para que la sustracción adquiriera el carácter de operación interna.

De manera análoga, la división de dos números no es "interna" en el conjunto de los números naturales; es decir, que no siempre al dividir dos de tales números se obtiene otro número natural solamente: esto ocurre nada más cuando la división es exacta. Hay que esperar a las fracciones para que la división adquiera el carácter de operación interna: al dividir dos fracciones –con tal de que la segunda sea diferente de 0– siempre se obtiene una fracción... y no hay resto.

La segunda reflexión se centra en las relaciones existentes entre las cuatro operaciones aritméticas básicas. Gráficamente podrían representarse así (con las salvedades hechas en su momento a la multiplicación como suma reiterada y a la división como inversa de la multiplicación):



Esta visualización nos debe hacer pensar en la matemática como una ciencia en la que sus objetos –operaciones aritméticas en este caso– nunca están aislados, sino que mantienen relaciones entre ellos. Realmente, la matemática es una ciencia de objetos y de relaciones entre ellos. Esto nos lleva a las consideraciones que hacíamos en el Cuaderno 1 acerca de la importancia de no aislar las cosas, sino de buscar, comprender y saber utilizar las relaciones existentes entre ellas.

2. El desarrollo de destrezas para dividir

Atención:

Todo lo que se va a decir ahora no es sólo para entenderlo. Es, sobre todo, para practicarlo. Pero no un par de veces, y ya. La ejercitación frecuente y abundante es requisito indispensable para desarrollar destrezas de cálculo mental. Y esto es muy importante, porque si no las poseemos no podremos construirlas con nuestros alumnos.

2.1. Relaciones entre los cuatro términos de la división

En primer lugar, nos conviene afianzar los conceptos y las *relaciones existentes entre los cuatro términos que intervienen en la división*. Para ello intentaremos contestar a las siguientes preguntas (hágalo primero por su cuenta, antes de revisar las respuestas):

a) ¿Cómo se calcula el dividendo en una división exacta?
b) ¿Cómo se calcula el dividendo en una división inexacta?
c) ¿En qué casos el cociente es mayor que la unidad?
d) ¿En qué casos el cociente es menor que la unidad?

Ahora, en el caso de una división exacta:
e) Se ha dividido un número por **5**. ¿Cuántas veces el dividendo contiene al cociente?
f) Si el cociente es **12**, ¿cuántas veces contiene el dividendo al divisor?
g) ¿Cuál es el divisor cuando el dividendo contiene al cociente **10** veces?
h) ¿Cuál es el cociente cuando el dividendo contiene al divisor **25** veces?

He aquí las respuestas:
a) Multiplicando el divisor por el cociente
b) Multiplicando el divisor por el cociente y agregando el residuo
c) Cuando el dividendo es mayor que el divisor
d) Cuando el dividendo es menor que el divisor
e) 5 veces
f) 12 veces
g) 10
h) 25

2.2. Expresiones equivalentes

Hay otras consideraciones prácticas que se derivan de las relaciones presentes en las divisiones exactas. Por ejemplo, *expresiones equivalentes* tales como:

$24/12 = 2 \leftrightarrow 24$ es el doble de $12 \leftrightarrow 12$ es la mitad de $24 \leftrightarrow 24 = 2 \times 12 \leftrightarrow 24/2 = 12 \leftrightarrow 24 + 12$ es el triple de $12 \leftrightarrow 24 - 12 = 12 \leftrightarrow 24 \times 12 = 2 \times 12^2$

Expresiones que se pueden generalizar al caso en que A : B = n. Así:

$A/B = n \leftrightarrow A$ es n veces $B \leftrightarrow B$ es la enésima parte de $A \leftrightarrow A = n \times B \leftrightarrow A/n = B \leftrightarrow A + B = (n + 1)$ veces $B \leftrightarrow A - B = (n - 1)$ veces $B \leftrightarrow A \times B = n \times B^2$

Estas equivalencias nos permiten resolver rápidamente algunos problemas, como dos de los que se plantean al inicio del Cuaderno:

a) La diferencia de dos números naturales es **940** y el cociente exacto del mayor entre el menor es **11**. ¿De qué números se trata?

b) *La suma de dos números enteros es **168**; al dividirse el mayor entre el menor se obtiene **7** como cociente y **16** como residuo. ¿Cuáles son los números?*

Veamos su resolución:
a) Sean **D** y **d** ambos números. Los datos son $D : d = 11$, $D - d = 940$. Ahora bien, si en una división el dividendo se sustituye por la diferencia entre el dividendo original menos el divisor, el cociente disminuye en una unidad (¿seguro?). Así, en nuestro caso, $940 : d = 10$. Luego $d = 940 : 10 = 94$. Y como **D** es 11 veces mayor, $D = 94 \times 11 = 1.034$.

b) Si llamamos **D** al número mayor y **d** al menor, podemos recoger los datos del problema así:
$D + d = 168$ y $\begin{array}{r|l} D & d \\ 16 & 7 \end{array}$, de donde: $D = 7 \times d + 16$

Si **D** fuera **16** unidades menor, por un lado la suma de este **D** y **d** sería también **16** unidades menor, es decir: $168 - 16 = 152$, y por otro lado, la división sería exacta. Este último dato significa que el nuevo **D** sería un número **7** veces mayor que **d**, es decir, que "el nuevo $D + d = 8$ veces el valor de **d**" $\Rightarrow 152 = 8 \times d$. Luego $d = 152 : 8 = 19$. De donde, el valor inicial de **D** es: $D = 7 \times 19 + 16 = 133 + 16 = 149$.

2.3. Otras relaciones y regularidades

Aunque no contamos con propiedades similares a las de la adición y multiplicación (conmutativa, asociativa y disociativa), sí podemos establecer un cuerpo de *relaciones y regularidades* útiles. Veamos esto con más detalle.

En efecto, no podemos considerar la propiedad conmutativa en la división ya que **5 : 3** no es lo mismo que **3 : 5**. Los únicos casos en que **m : n** es igual a **n : m** ocurren si **n = m ≠ 0**. También es cierto que no podemos hablar de la propiedad asociativa en el caso de la operación de división, y que el elemento neutro (el **1**) sólo "funciona" por la derecha, es decir, que **5 : 1 = 5** (pero **1 : 5 ≠ 5**). Sin embargo, hay otras propiedades de interés que pueden facilitarnos el desarrollo de destrezas para dividir. Destrezas que, como veíamos en las otras operaciones, son la base del cálculo mental aplicado a las divisiones.

Si reflexionamos sobre el funcionamiento de la división como inversa de la multiplicación y nos centramos en el significado de algunas tablas de multiplicar (ver Cuaderno 5), podemos inferir también el significado de la división para el caso de algunos divisores particulares. Así, tenemos que (para entender mejor los casos que se proponen, la mayoría de los ejemplos se refieren a divisiones exactas):

1. Dividir entre 1 es *dejar intacto el dividendo*. Así, 47 : 1 = 47.

2. Como multiplicar por **10** significa agregar un **0** al otro factor, dividir entre **10** un número terminado en **0** se reduce a *eliminar ese **0** en el dividendo*. Así, **5.070 : 10 = 507** (después veremos su significado en el caso de los decimales).

3. Como los productos de la tabla de multiplicar por **2** son el **doble** de los correspondientes de la tabla del **1**, dividir entre **2** significa *obtener la **mitad** del dividendo*. Así, **436 : 2** es la mitad de **436**. La mitad de **400** es **200**, la de **30** es **15**, y la de **6** es **3**. De donde: **436 : 2 = 200 + 15 + 3 = 218**.

4. Los productos de la tabla de multiplicar por **4** son el **doble** de los correspondientes de la tabla del **2**. Por consiguiente, dividir entre **4** significa *obtener **dos** veces consecutivas la **mitad** a partir del dividendo*. Así, **812 : 4** pasa por obtener la mitad de **812** –que es **406**– y obtener ahora la mitad de este último número, con lo que se llega a **203**.

5. Como los productos de la tabla del **8** son el **doble** de los correspondientes de la tabla de multiplicar por **4**, dividir entre **8** significa *obtener **tres** veces consecutivas la **mitad** a partir del dividendo*. Así, **1.024 : 8** pasa por obtener la mitad de **1.024** –que es **512**–, la mitad de **512** –que es **256**–, y la mitad de este último número, que es **128**.

6. Los productos de la tabla del **5** son la **mitad** de los correspondientes de la tabla del **10**. Por consiguiente, dividir entre **5** un número acabado en **0** equivale a *eliminar ese 0 en el dividendo y luego obtener el doble de este último número*. Así, **630 : 5** equivale al doble de **63**, que es **126**.

De las consideraciones anteriores podemos inferir otras, de interés para el cálculo mental de multiplicaciones y divisiones:

1. Para multiplicar por otras potencias de **2** (**16**, **32**, **64**, etc.), basta obtener reiteradamente "el **doble** de" a partir del otro factor tantas veces como lo indique el exponente de la potencia de **2**. Así, será **4** veces para el factor **16** (2^4), **5** veces para el factor **32** (2^5), etc. Por tanto, **23 x 32 = 736**

(secuencia de 5 dobles a partir de **23: 46 ➔ 92 ➔ 184 ➔ 368 ➔ 736**).

2. De manera inversa se procede para la división entre potencias de **2**: ahora la secuencia será de "la mitad de" a partir del dividendo, tantas veces como lo indique el exponente de la potencia de **2**. Así, **2.032 : 16 = 127** (ya que **16 = 2^4**; partiendo de **1.016** se sigue una secuencia de 4 mitades: **1.016 ➔ 508 ➔ 254 ➔ 127**).

3. Como **25 = 100/4**, multiplicar un número por **25** equivale a agregarle **dos** ceros y obtener **dos** veces la **mitad** a partir de este resultado. Así, **25 x 18 = (100/4) x 18 = 1.800 : 4**, que lleva a la secuencia de dos mitades: **900 ➔ 450**. De un modo análogo se procede con el factor **125 (125 = 1.000/8)**; así, **28 x 125 = 28.000 : 8**, que lleva a la secuencia de tres mitades: **14.000 ➔ 7.000 ➔ 3.500**.

4. De manera inversa se procede para la división entre potencias de **5** (**25**, **125**, **625**, etc.). Así, dividir un número entre **25** equivale a dividirlo entre **100** (eliminar dos ceros a la derecha) y luego multiplicarlo por **4** (operar dos veces "el doble de"). Así, **6.500 : 25 = 6.500 : (100/4) = 65 x 4**, que lleva a la secuencia de dobles **130 ➔ 260**.

En el caso en que el divisor no esté formado exclusivamente por potencias de 2 y de 5, sino que pueda disociarse en estos y otros factores, la división puede ir transformándose en sucesivas divisiones entre cada uno de esos factores. Así, para dividir **732** entre **12**, como **12 = 2 x 2 x 3**, podemos establecer una secuencia de divisiones equivalentes a la primera: **732 : 12 ⟷ 366 : 6 ⟷ 183 : 3 = 61**. Esta secuencia puede llevarse mentalmente de esta manera: **732 entre 2** es su **mitad**, **366**; **366 entre 2** es su **mitad**, **183**; y **183 entre 3** es la **tercera parte** de **180** (que es **60**) y de **3** (que es **1**), es decir, **61**. Lo que se busca es hacer más "ligeras" las cantidades que se dividen...

Pero en algunas oportunidades puede resultar útil el proceso inverso, es decir, multiplicar adecuadamente dividendo y divisor para facilitar la división. Así, por ejemplo, para dividir **73,5 entre 1,5** podemos multiplicar ambas cantidades por **2** y pasar a la división equivalente de **147 entre 3**, más sencilla de resolver.

Otra propiedad que también es útil para el cálculo mental de las divisiones es la de la *distributividad con respecto a la adición y a la sustracción*. Es decir, al dividir una suma entre un número se obtiene el mismo resultado que si se suman los cocientes de cada sumando entre ese número. Y de manera análoga para la resta. Así, por ejemplo, **(60 + 30) : 15 = 60 : 15 + 30 : 15 = 4 + 2 = 6** (que es el resultado de **90 : 15**). Y también, **(56 – 24) : 8 = 56 : 8 – 24 : 8 = 7 – 3 = 4**.

Con referencia a la propiedad anterior, conviene no confundirla con una falsa distributividad. Es decir, la suma o la resta deben figurar en el dividendo, no en el divisor. Porque, por ejemplo, **60 : (15 + 5)** es igual a **60 : 20**, cuyo resultado es **3**. Pero la aplicación de esta falsa distributividad nos llevaría a **60 : 15 + 60 : 5 = 4 + 12 = 16**, resultado erróneo.

Finalmente, también podemos destacar otras *regularidades* que se presentan cuando se producen algunas transformaciones en las cantidades de los cuatro términos que intervienen en la división. Con el fin de detectar tales regularidades, intente resolver los ejercicios que se proponen a continuación. Luego podemos comparar sus respuestas con las que se exponen posteriormente.

a) ¿Qué le ocurre al cociente en una división exacta si:

1. el dividendo se multiplica por **7** y el divisor permanece **igual**?

2. el dividendo se divide entre **3** y el divisor permanece **igual**?

3. el dividendo permanece **igual** y el divisor se multiplica por **5**?

4. el dividendo permanece **igual** y el divisor se divide entre **3**?

5. el dividendo se multiplica por **3** y el divisor se divide entre **2**?

6. el dividendo se multiplica por **6** y el divisor se multiplica por **3**?

7. el dividendo se divide entre **2** y el divisor se divide entre **8**?

8. el dividendo se divide entre **3** y el divisor se multiplica por **5**?

9. se agrega al dividendo una cantidad **igual** al divisor?

10. se le resta al dividendo una cantidad **igual** al divisor?

11. el cociente y el divisor intercambian sus funciones?

b) ¿Qué modificaciones simultáneas pueden hacerse a las cantidades del dividendo y del divisor de una división exacta para que el cociente:

1. permanezca igual?

2. se duplique?

3. se reduzca a su tercera parte?

c) ¿Qué le puede haber ocurrido al dividendo de una división exacta si:

1. el divisor ha permanecido **igual** y el cociente se ha reducido a su **mitad**?

2. el divisor ha permanecido **igual** y el cociente se ha **triplicado**?

3. el divisor se ha **duplicado** y el cociente se ha **cuadruplicado**?

4. el divisor se ha reducido a su **mitad** y el cociente se ha **sextuplicado**?

5. el divisor se ha **duplicado** y el cociente se ha reducido a su **mitad**?

6. el divisor y el cociente se han reducido a su **mitad**?

d) ¿Qué le puede haber ocurrido al divisor de una división exacta si:

1. el dividendo ha permanecido **igual** y el cociente se ha reducido a su **mitad**?

2. el dividendo ha permanecido **igual** y el cociente se ha **triplicado**?

3. el dividendo se ha **cuadruplicado** y el cociente se ha **duplicado**?

4. el dividendo se ha reducido a su **sexta parte** y el cociente se ha **duplicado**?

5. el dividendo se ha **duplicado** y el cociente se ha reducido a su **mitad**?

6. el dividendo y el cociente se han reducido a su **tercera parte**?

e) Si en una división inexacta el dividendo se **duplica** y el divisor permanece **igual**, ¿qué le ocurre al cociente? ¿Y al residuo?

He aquí, brevemente, las respuestas:

a) 1. Se multiplica por 7; **2**. se divide entre 3; **3**. se divide entre 5; **4**. se multiplica por 3; **5**. se multiplica por 6; **6**. se multiplica por 2; **7**. se multiplica por 4; **8.** se divide entre 15; **9.** aumenta en 1 unidad; **10.** disminuye en 1 unidad; **11.** es el anterior divisor.

b) 1. Multiplicar o dividir ambos por la misma cantidad simultáneamente; **2**. que el divisor se multiplique por a ($a > 0$) y el dividendo por el doble de a, o que el dividendo permanezca igual y el divisor se reduzca a su mitad, o que el dividendo se divida entre a y el divisor entre el doble de a; **3**. que el dividendo se multiplique por a y el divisor por el triple de a, o que el divisor permanezca igual y el dividendo se reduzca a su tercera parte, o que el divisor se divida entre a y el dividendo entre el triple de a.

c) 1. Se ha dividido entre 2; **2**. se ha multiplicado por 3; **3**. se ha multiplicado por 8; **4**. se ha multiplicado por 3; **5**. ha permanecido igual; **6**. se ha dividido entre 4.

d) 1. Se ha multiplicado por 2; **2**. se ha dividido entre 3; **3**. se ha multiplicado por 2; **4**. se ha dividido entre 12; **5**. se ha multiplicado por 4; **6**. ha permanecido igual.

e) Resuelva varios casos y formule la conclusión pertinente...

Vamos a propiciar el desarrollo de nuestras destrezas con la división. Para ello, resuelva mentalmente los siguientes ejercicios:

864 : 8	*170 : 5*	*356 : 4*
272 : 16	*38.000 : 100*	
3.500 : 25	*432 : 24*	*315 : 15*
216 : 18	*6.010 : 10*	*484 : 2*
1.010 : 5	*606 : 6*	
49.049 : 7	*120.120 : 120*	
12.423 : 123	*792 : 8*	*162 : 18*
294 : 3		

Si **12.193 : 137 = 89**, ¿cuál será el cociente de **24.386 : 137**?
Si **12.040 : 56 = 215**, ¿cuál será el cociente de **6.020 : 14**?
Si **4.608 : 64 = 72,** ¿cuál será el cociente de **1.536 : 128**?

3. La división en el sistema de numeración decimal

Hasta ahora se han resuelto algunos ejercicios de división sobre la base del conocimiento de las tablas de multiplicar y de la utilización de las regularidades de la operación. Pero no todas las divisiones pueden realizarse con soltura por esta vía. Basta con tener grandes cantidades, o decimales, en el dividendo y en el divisor. En estos casos, procedemos basándonos en las mismas tablas y en las potencialidades del sistema de numeración decimal. Distinguimos dos casos: el de la división entera y el de la división con decimales.

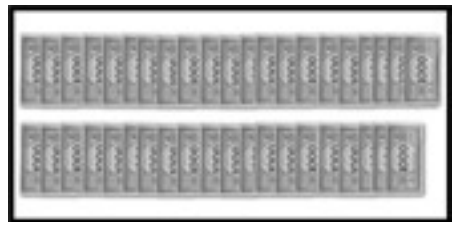
División entera (exacta y no exacta)

Supongamos que tenemos que resolver la división **41.507 : 18**. ¿Cómo llegar a construir y explicar el algoritmo habitual para esta división (u otra cualquiera)? Una vía sencilla es la que habitualmente hemos propuesto con materiales concretos: los billetes de denominación decimal.

En primer lugar, debemos "romper" el dividendo: **4 billetes de 10.000** (decenas de mil), **1 de 1.000** (unidades de mil), **5 de 100** (centenas) y 7 de 1 (unidades).

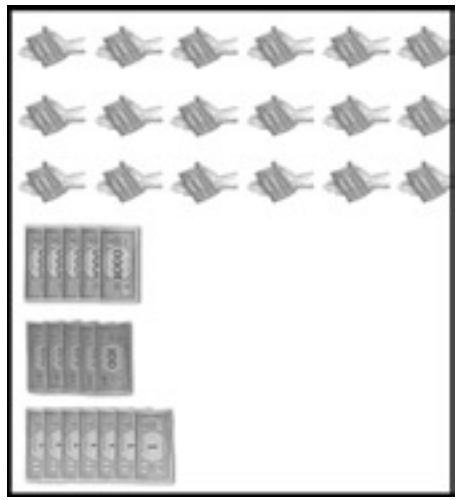
Intentemos ahora "repartir" estas cantidades entre **18** sujetos, con la ayuda de nuestro desinteresado banco...

Evidentemente, a ninguno de los 18 sujetos le "toca" un billete de 10.000, pues sólo hay 4 para repartir. Vamos al banco y cambiamos los **4** de **10.000** por **40** de **mil** que, unidos al que se tenía, nos da **41** billetes de **mil**.

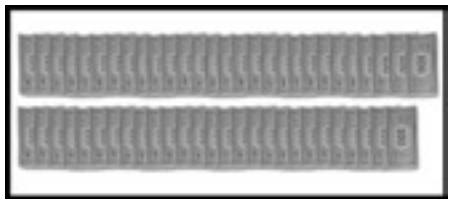


Ahora sí hay billetes que repartir; y ya sabemos algo de inmediato: el cociente está en el orden de las **unidades de mil**.

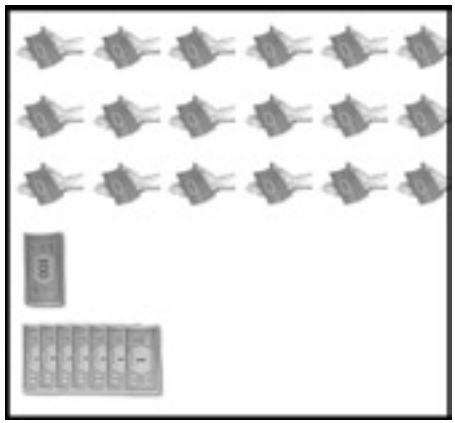
En el reparto podemos dar **2** rondas completas (**36** billetes repartidos) y nos sobran **5** billetes de **mil**.



En el banco los cambiamos por **50** de cien que, unidos a los **5** que se tenían, nos da **55** billetes de cien.

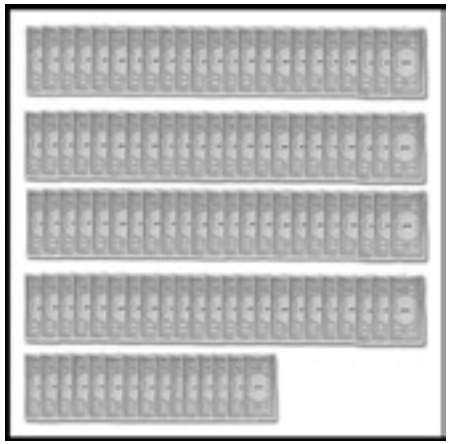


Ahora podemos dar **3** rondas completas (**54** billetes repartidos) y nos sobra **1** billete de cien.

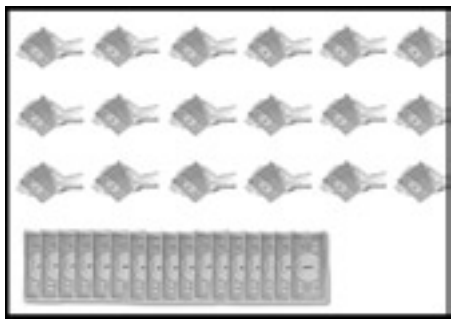


En el banco lo cambiamos por **10** de diez. No teníamos billetes de diez, de modo que intentamos repartir los **10** entre los **18** sujetos; misión imposible: nadie recibe un billete de diez.

En el banco los cambiamos por **100** de uno que, unidos a los **7** que se tenían, nos da **107** billetes de uno.



Finalmente podemos dar **5** rondas completas (**90** billetes repartidos) y nos sobran **17** billetes de uno.



El cociente de la división está en las manos de cada uno de los **18** sujetos beneficiados con el reparto: **2** billetes de **mil**, **3** de **cien**, **ninguno** de **diez** y **5** de **uno**; es decir, **2.305**. Y el residuo es **17**. Como puede verse al proceder por esta vía del reparto (restas sucesivas), en principio no es necesario saber multiplicar para poder dividir. ¿Cuál es, pues, la utilidad del uso de las tablas de multiplicar? Abreviar el proceso de reparto. Por ejemplo, al repartir los 55 billetes de cien, el proceso se acorta si se sabe que **18 x 3 = 54**: no son necesarias las rondas y de una vez se conoce que a cada sujeto le corresponden **3** de tales billetes y que queda uno de sobra.

A partir de estas consideraciones es posible construir y –sobre todo– entender el algoritmo habitual de la división. En una primera instancia, puede procederse a escribir los sustraendos que progresivamente se van restando del dividendo; escritura que, posteriormente, puede desaparecer para dar paso a los correspondientes cálculos mentales:

```
 41507 |18          41507 |18
-36    |2305          55    2305
  55                 107
-54                   17
  10
 -0
  107
 -90
   17
```

Obsérvese que cuando el divisor es **> 10**, se presenta el problema de determinar cada cifra del cociente. Para sol-

ventar esta situación, puede construirse previamente la tabla de multiplicar del divisor (**18 x 1 = 18; 18 x 2 = 36; ... 18 x 9 = 162**) y tenerla a la vista mientras se divide (Vergnaud, 1991), o bien proceder a estimar esas cifras y a precisarlas mediante un ejercicio de ensayo y ajuste, como habitualmente solemos hacer.

Este algoritmo es el más complejo de los correspondientes a las cuatro operaciones aritméticas básicas. Por eso presenta mayores dificultades para su aprendizaje. Razón de más para exigir su comprensión además del mero dominio mecánico. Por eso insistimos en que el recurso a los elementos concretos –reparto con los billetes de denominación decimal, proceso mediante el cual todos los números que van apareciendo en el desarrollo del algoritmo tienen su propio significado, empezando por la lectura del dividendo– debe estar siempre a la mano para dotar de significado al ejercicio de la división cada vez que el aprendiz experimente dificultades o cometa errores en su desarrollo.

División con decimales

En este apartado pueden presentarse diversas situaciones, tales como: **315,2 : 12**; **126 : 35,04**; **17 : 24**; **33,2 : 156**; **6,15 : 18,45**; **0,14 : 0,049**; **0,03 : 0,152**; etc. Es decir, puede haber decimales en el dividendo, en el divisor, en ambos, o en ninguno; y simultáneamente, el divisor puede ser menor o mayor que el dividendo y, además, **< 1** ó **> 1**.

Para clarificar esta complejidad tenemos que trabajar primero con la división de las diversas unidades –enteras y decimales– del sistema de numeración decimal. Así, por ejemplo, ¿qué significa el cociente de **0,1 : 100**? Puede entenderse como "la centésima parte de una décima" (1 milésima). Y el de **1.000 : 10** como "la décima parte de una unidad de mil" (1 centena), así como el "número de veces que **10** está contenido en **1.000**" (100). También el de **100 : 0,01** puede interpretarse análogamente. Pero el cociente de una división como **0,001 : 0,1** puede verse además como "la parte decimal del divisor que está contenida en el dividendo" (1 centésima).

Existe, pues, una variedad de interpretaciones para los casos de divisiones entre las unidades del sistema de numeración decimal, que podríamos resumir así:

Caso	Situación
1	El dividendo es mayor que el divisor y éste es > 1
2	El dividendo es mayor que el divisor y éste es < 1
3	El dividendo es menor que el divisor y éste es > 1
4	El dividendo es menor que el divisor y éste es < 1

Veamos algunos ejemplos de interpretación de estas situaciones:

Caso	División	Cociente	Interpretación de la división
1	1.000 : 100	10	**1.000** contiene **10** veces a **100** **100** es la **décima** parte de **mil**
2	100 : 0,1	1.000	**100** contiene **1.000** veces a **0,1** **0,1** es la **milésima** parte de **100**
3	10 : 1.000	0,01	**10** es la **centésima** parte de **1.000** sólo la **centésima** parte de **1.000** está contenida en **10**
4	0,001 : 0,01	0,1	**0,001** es la **décima** parte de **0,01** sólo la **décima** parte de **0,01** está contenida en **0,001**

Interprete las divisiones siguientes:

1.000 : 10 100 : 10 1 : 100 0,1 : 10 0,01 : 100 1 : 0,01 1.000 : 0,1

100 : 0,01 10 : 0,001 0,1 : 0,001 0,01 : 0,001 0, 001 : 0,1 0,01 : 0,1

También resulta de mucho interés establecer una equivalencia entre la "multiplicación por" y la "división entre", como se ilustra en la siguiente tabla:

Dividir entre	Multiplicar por	Ejemplos
1.000	0,001	35 : 1.000 ◄► 35 x 0,001 ◄► 35 (con 3 decimales) = 0,035
100	0,01	86,5 : 100 ◄► 86,5 x 0,01 ◄► 865 (con 3 decimales) = 0,865
1.000	0,001	0,2 : 1.000 ◄► 0,2 x 0,001 ◄► 2 (con 4 decimales) = 0,0002
10	0,1	2,3 : 10 ◄► 2,3 x 0,1 ◄► 23 (con 2 decimales) = 0,23
100	0,01	3,39 : 100 ◄► 3,39 x 0,01 ◄► 339 (con 4 decimales) = 0,0339
0,01	100	64 : 0,01 ◄► 64 x 100 ◄► 6.400
0,001	1.000	0,079 : 0,001 ◄► 0,079 x 1.000 = 79
0,1	10	0,0041 : 0,1 ◄► 0,0041 x 10 = 0,041
0,001	1.000	0,35 : 0,001 ◄► 0,35 x 1.000 = 350
0,01	100	0,01 : 0,01 ◄► 0,01 x 100 = 1

Todas estas observaciones nos permiten responder a preguntas como las siguientes (intente resolverlas antes de revisar las respuestas):

a) ¿En qué caso el cociente es menor que el dividendo? ¿Y cuándo es mayor?

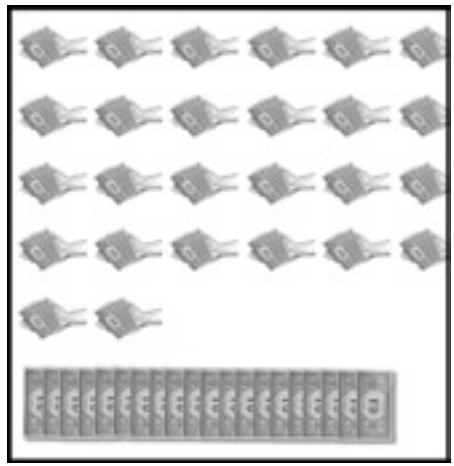
b) *Se divide un número por* ***0,2****. ¿Cuántas veces contiene el cociente al dividendo?*

c) ¿Cuál es el divisor cuando el cociente contiene al dividendo **4** veces?

cuyas respuestas son: **a)** Si el divisor es >1 ó <1, respectivamente; **b)** 5 veces; **c)** 0,25.

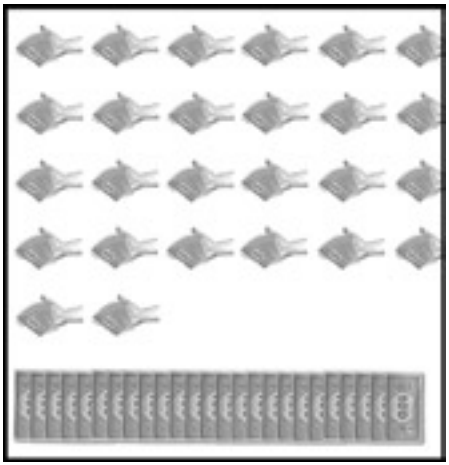
Después de estos análisis básicos podemos afrontar la división entre cantidades decimales con toda la variedad de casos que pueden presentarse, tal como lo apuntábamos antes. Habitualmente suelen darse varias reglas, correspondientes a esos diversos casos, según los decimales estén presentes en el dividendo, en el divisor, en ambos o en ninguno. Vamos a analizar un solo caso –que no haya decimales en el divisor– y luego intentaremos reducir todos los demás a este solo.

Supongamos que se trata de efectuar la división 3.808,47 : 26. ¿Es posible utilizar aquí el recurso de los billetes de denominación decimal? Sí. Si se tratara de la división entera 3.808 : 26 llegaríamos por esa vía a tener como cociente 146 y como resto 12 unidades (verifíquelo). La situación prosigue de la misma manera: vamos al banco y cambiamos esos 12 billetes de 1 por 120 billetes de 0,1 que, unidos a los 4 que teníamos, nos dan 124 a repartir; podemos dar 4 rondas de reparto y nos sobran 20 billetes de 0,1.



Vamos de nuevo al banco y cambiamos esos 20 billetes de 0,1 por 200

billetes de **0,01** que, unidos a los 7 que teníamos, nos dan **207** a repartir; podemos dar **7** rondas de reparto y nos sobran **25** billetes de **0,01**.



Y así podemos proseguir tantas veces como decimales se requieran en el cociente. Obsérvese que antes del **4** debe colocarse la **coma** en el cociente, no porque sea una regla, sino porque se trata de **4 décimas** y esta identificación requiere de tal coma. El resultado de **3.808,47 : 26** es, finalmente, un cociente de **146,47** y **25** (centésimas) como resto.

Con el fin de intentar ahora la reducción de los demás casos al anterior, recordemos que *el cociente de una división no se altera si el dividendo y el divisor se multiplican o se dividen por la misma cantidad*. Así, por ejemplo, son equivalentes las siguientes divisiones:

28 : 4 ◄► 280 : 40 ◄► 280.000 : 40.000
◄► 2,8 : 0,4 ◄► 0,0028 : 0,0004
0,28 : 0,04 etc.

Esta propiedad nos permite transformar cualquier división en una equivalente, cuyo divisor no posea decimales:

315,2 : 0,23 (multiplicando ambos por **100**)
◄► 31.520 : 23
0,63 : 1,5 (multiplicando ambos por **10**)
◄► 6,3 : 15
86 : 0,725 (multiplicando ambos por **1.000**)
◄► 86.000 : 725
0,0042 : 3,05 (multiplicando ambos por **100**)**◄► 0,42 : 305**

¿Y cómo darle significado a una división como **0,42 : 305**? Veámoslo en esta tabla:

Situación parcial	Análisis	Acción en el cociente
0 unidades a repartir	No hay reparto posible	Se coloca un **0** en las **unidades**
4 décimas a repartir	No hay reparto posible	Se coloca un **0** en las **décimas** (y una **coma** previa, necesaria)
42 centésimas a repartir	No hay reparto posible	Se coloca un **0** en las **centésimas**
420 milésimas a repartir	Se reparte **1 milésima** y sobran **115**	Se coloca un **1** en las **milésimas**
1.150 diezmilésimas a repartir etc.	Se reparten **3 diezmilésimas** y sobran **235 diezmilésimas** etc.	Se coloca un **3** en las **diezmilésimas** etc.

Trate de "razonar" de este modo algunas divisiones que Ud. mismo(a) puede proponerse... Lo importante, como se ve, es darle significado a cada uno de los pasos de la operación y no tanto enseñar reglas mecánicas y memorísticas. Estas reglas deben aparecer más bien como un descubrimiento de los propios aprendices.

Finalizamos esta sección proponiéndole la resolución de los siguientes ejercicios, en los que debe escribir el elemento ausente de cada fila de la tabla:

Dividendo	Divisor	Cociente
157	?	1,57
14,328	143,28	?
0,000175	?	0,0175
?	0,00001	4,37
183	?	0,1
?	1.000	92,03
?	0,076	100
?	0,1	101
1,69	0,0169	?
0, 0345	10	?
2,38	?	100

4. Estimar el cociente de una división

Ya sabemos que esto significa *dar el resultado aproximado del cociente*. Decisión que se justifica porque a veces no es necesario el valor exacto de la operación, sino que resulta suficiente una aproximación adecuada a nuestros intereses o a la naturaleza del problema. Es de hacer notar que la estimación en el caso de la división resulta más sencilla que en el de las otras operaciones aritméticas, ya que en ella se procede de izquierda a derecha con las cifras del dividendo.

Para estimar el valor del cociente basta seguir el proceso indicado: "leer" el dividendo desglosado en unidades del sistema de numeración decimal y proceder con la idea de repartirlas entre tantos sujetos como indica la cantidad del divisor. Como hemos visto, inmediatamente aparece un dígito que nos indica en qué orden máximo de unidades se ubica el cociente, con lo que ya llegamos a una respuesta inicial razonable.

A veces resulta útil redondear los valores del dividendo y del divisor para facilitar ese cálculo inicial, pero hay que tener presente que tienen mayor repercusión en el resultado las variaciones que se aplican al divisor que las que se hacen en el dividendo. Hecha esta primera estimación, sólo es cuestión de ir afinando el valor obtenido.

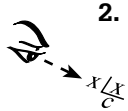
Por ejemplo, si se desea estimar el cociente de **0,786 : 18,154** procedemos primero a transformar la división (multiplicando por **1.000**) en **786 : 18.154** y vamos razonando: Con 786 unidades, no alcanza para una unidad; con 7.860 décimas, no alcanza para una décima; con **78.600** centésimas, sí alcanza para **centésimas**. Y para estimar cuántas, podemos redondear los términos a **80.000 : 20.000**, lo que nos da un valor aproximado de **4** centésimas. Por consiguiente, el valor aproximado de la división es **0,04**.

Estime mentalmente el cociente de las siguientes divisiones:

138,2 : 0,65	***3,1416 : 18***
0,059 : 37,2	***763.156 : 328***
3.178 : 0,51	***61,02 : 975,9***
0,035 : 0,48	***0,0046 : 0,00074***
0,0086 : 0,39	***0,0101 : 2,1***

5. Tengo ante mí una situación de división; y ahora, ¿qué hago?

1. *Observo la situación* y decido si necesito un resultado exacto, o me basta con una aproximación. En el segundo caso procedo por la vía de la estimación... y listo.



2. Si necesito un resultado exacto, *leo el dividendo* y *estimo el valor del cociente*, para tener desde el comienzo una idea razonable y aproximada del resultado.

3. *Decido la vía* que voy a utilizar para *realizar* la división: el cálculo mental o el algoritmo escrito habitual.

4. *Efectúo* la división por esa vía y llego al cociente (con los decimales solicitados, si es el caso) y al resto.

5. *Reviso el resultado* obtenido. Para validar su exactitud, puedo servirme de la calculadora (cociente x divisor + resto debe ser igual al dividendo). Además, aprovecho para *revisar la estimación inicial* y buscar la forma de afinarla.

Este proceso puede seguirse tanto si se trata de un ejercicio directo de división o de estimación –con lo cual en el paso 1 queda decidido–, como si se trata de una situación problema que implique la división como modelo adecuado.

Lo que sí conviene destacar es que, dados el dividendo (D) y el divisor (d), no siempre es necesario escribirlos en la forma D | d (con la galera) para realizar la operación en ese espacio. La operación puede realizarse con toda libertad por cualquiera de las vías propuestas, y algunas de ellas no necesitan recursos para escribir, sino una mente activa.

6. La resolución de problemas de división

Los "problemas de dividir" pueden adoptar la forma de situaciones de la vida diaria en las que la división aflora sin dificultad como la operación matemática que sirve de modelo oportuno. Otras veces, pueden presentar un carácter lúdico, o referirse a regularidades o características que presentan algunos números y series de números. Vamos a plantear algunos de estos tipos de problemas. Lo que volvemos a sugerir a nuestros lectores es que, una vez leído el enunciado de cada situación, intenten resolver el problema por cuenta propia, antes de revisar la vía de solución que se presenta posteriormente.

a) *¿Cuál es la **987ª** letra de la serie: **A B C D E D C B A B C D E D C B A B C D**... ?*

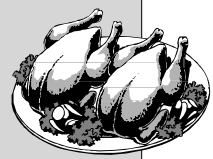
b) La suma de **101** números impares consecutivos es **12.827**. ¿Cuál es el menor de tales números?

c) *Si se escriben los números desde **0** hasta **1.000**, ¿cuántas veces se escribe la cifra **5**?*

d) Se tienen **9** monedas entre las cuales hay una falsa que pesa un poco menos que las demás. Para averiguar cuál de las **9** es, se dispone de una balanza sin pesas y se dan sólo dos oportunidades para utilizarla. ¿Cómo hacemos?

e) *Un kilo de naranjas tiene entre **6** y **8** naranjas. ¿Cuál es el mayor peso que pueden tener **6** docenas de naranjas?*

f) La diferencia de dos números es **1.231**; al dividirse el mayor entre el menor se obtiene **17** como cociente y **15** como residuo. ¿De qué números se trata?



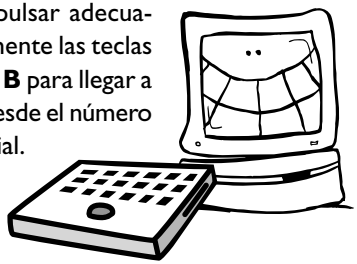
g) *Arturo acude a un restaurante con sus tres hijos, dos gemelos y una hija que es **2** años mayor que ellos. La ración de pollo cuesta **4.600** pesos para los adultos; los niños pagan **450** pesos por cada año de su edad. Después de comer, Arturo paga **16.300** pesos. ¿Cuáles son las edades de sus tres hijos?*

h) Complete las casillas del siguiente cuadro:

4	+		:		= 3
x		+		x	
	+		:		= 5
:		:		x	
	+		+		= 7
= 6		=3		= 8	

i) *Una persona debe a dos comerciantes la misma cantidad de dinero. Al primero le paga con **18** kg de mercancía más **8.000** pesos. Al segundo le da **25** kg de la misma mercancía y recibe como devolución **45.200** pesos. ¿Cuánto debía, en pesos, a cada uno de los comerciantes?*

j) En la pantalla de una computadora aparece un número; se dispone de dos teclas: pulsando la **A**, se restan dos unidades al número en pantalla; pulsando la **B**, se divide entre dos el número en pantalla. El juego consiste en pulsar adecuadamente las teclas **A** y **B** para llegar a **0** desde el número inicial.



a. Muestre una secuencia de pulsaciones de **A** y **B** para llegar a **0** desde **32**

b. Ídem, desde **50**

c. ¿Para qué tipo de números no es posible construir ninguna secuencia "exitosa"?

d. Si la secuencia exitosa es **B B B A A A**, ¿de qué número se trata?

Vamos, pues, a reportar algunas vías de solución para poder contrastarlas con las que hemos podido obtener entre todos.

a) Primero, como siempre, hay que fijarse bien en la secuencia propuesta. Empieza en **A**, avanza hasta **E** y retrocede de nuevo hacia **A**. Hay una secuencia básica que se repite: **A B C D E D C B** y que consta de **8** términos. Es decir, cada **8** letras estamos empezando de nuevo. Nuestro problema consiste en saber cuántas (cociente) de estas secuencias básicas de **8** (divisor) letras "caben" completas en **987** (dividendo) y, sobre todo, cuántas letras sobran (residuo), para poder identificar de cuál se trata dentro de la secuencia básica.

Estamos en presencia de una división, de la que nos interesa el residuo:

$$\begin{array}{r|l} 987 & 8 \\ \hline 3 & 123 \end{array}$$

Esto significa que hay **123** secuencias básicas completas más tres letras: la tercera de la secuencia básica es **C**. Por consiguiente, la letra que ocupa la posición **987ª** es la **C**.

b) Para abordar este problema debemos formarnos cierta idea de lo que significa una suma de **101** números impares consecutivos. Supongamos que formamos una empezando con **1**: **1 + 3 + 5 + 7 + …** Nos interesa conocer cuál sería el último sumando. Obsérvese que el **primero** es **1**, el **undécimo** es **21** (verifíquelo), el **vigésimo primero** es **41** (verifíquelo), con lo que ya se puede inferir que el **101°** sumando es **201**.

La suma sería, entonces: **1 + 3 + 5 + ... + 197 + 199 + 201**. ¿Cómo sumar todo esto rápidamente? Si nos fijamos y sabemos utilizar las propiedades conmutativa y asociativa de la suma, podemos agrupar así los sumandos: **(1 + 201) + (3 + 199) + (5 + 197) + ... + (97 + 105) + (99 + 103) + 101**. Hay **50** parejas, cada una de las cuales suma **202**, más el sumando **101**. Por consiguiente, la suma total es **50 x 202 + 101 = 10.100 + 101 = 10.201**.

Ya sabemos cómo se suma, pero no hemos llegado al total requerido: **12.827**. Por consiguiente, la serie de impares no debe empezar en 1, sino algo más adelante. ¿Cómo averiguar cuál es ese primer término? Si, por ejemplo, empezáramos la serie en **3**, la terminaríamos en **203**. Con este cambio, eliminamos el **1** e introducimos el **203**: la nueva suma habrá ganado: **203 – 1 = 202** unidades. Y esto será así cada vez que "corramos" un lugar a la derecha el inicio de la serie.

Lo que nos interesa saber, entonces, es cuántas veces tenemos que hacer esa "corrida" que produce cada vez un aumento de **202** en la suma, con el fin de

"llenar" la diferencia existente, **12.827 – 10.201 = 2.626**. Se trata de hallar el cociente de **2.626 : 202**, que es **13**. La serie de los **101** números impares empieza **13** lugares después del **1**, en **27** y termina en **227**.

c) En todos los problemas en los que se pide contar algo, la clave está en llevar ese conteo con orden. Una forma de hacerlo puede ser la de contar cuántas veces aparecela cifra **5** en la posición de las **unidades**, otro tanto en la de las **decenas** y en la de las **centenas**.

Para averiguar cuántas veces aparece en la posición de las **unidades**, veamos qué sucede en el intervalo de **0** a **100**. Una observación adecuada nos indica que aparece **10** veces (**5, 15, 25, ..., 95**). Por consiguiente, de **0** a **1.000** aparece **10 x 10 = 100** veces. De forma análoga se procede para averiguar cuántas veces aparece en la posición de las **decenas**: en el intervalo de **0** a **100** aparece **10** veces (**50, 51, ..., 59**). Por consiguiente, de **0** a **1.000** aparece **10 x 10 = 100** veces. Y para el caso de las centenas, en el intervalo de **0** a **1.000** aparece **100** veces (**500, 501, ..., 599**). Por consiguiente, de **0** a **1.000** la cifra **5** aparece **100 x 3 = 300** veces.

d) De entrada pudiera pensarse en separar las monedas en tres grupos, de **1**, **4** y **4** respectivamente, poner cada grupo de 4 en cada platillo de la balanza y observar: si la balanza se equilibra, la moneda menos pesada es la que se separó; pero si la balanza se desequilibra para un lado, sabremos en qué grupo está y habría que seguir el proceso con esas 4 monedas, dividiéndolas a su vez en dos grupos de 2. Pero este proceso puede llevarnos a tres pesadas. Este no es un camino seguro.

Nos queda la alternativa de separar las **9** monedas en otros **tres** grupos, de **3** monedas cada uno, poner **dos** de esos grupos de 3, uno en cada platillo de la balanza, y observar: si la balanza se equilibra, la moneda menos pesada está en el grupo que se separó; pero si la balanza se desequilibra para un lado, sabremos en qué grupo de 3 está. De cualquier forma, después de este paso sabremos el grupo de 3 monedas en el que se encuentra la menos pesada. Y en la siguiente pesada (formando previamente tres grupos de una moneda cada uno) y con un análisis similar al anterior, se llega al objetivo propuesto.

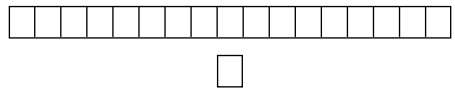
e) Seis docenas de naranjas contienen **72** naranjas. Si todas son de las más pesadas, habrá **6** por cada kilo. En este caso –que es el que nos interesa– las 6 docenas pesarán **72 : 6 = 12** kilos.

f) Si llamamos **D** (dividendo) al número mayor y **d** (divisor) al menor, podemos recoger los datos del problema así:

$$\begin{array}{r|l} D & d \\ 15 & 17 \end{array}$$ de donde: **D = 17 x d + 15**

Si **D** fuera **15** unidades menor, por un lado la diferencia entre **D** y **d** sería también **15** unidades menor, es decir: **1.231 – 15 = 1.216**, y por otro lado, la división sería exacta. Este último dato significa que el nuevo **D** sería un número **17** veces mayor que **d**.

Como ya sabemos, si el nuevo **D** es **17** veces mayor que **d**, entonces la diferencia entre ambos es, justamente, igual a **16** veces **d**. Pero veámoslo gráficamente (el nuevo D aparece en la 1ª fila y d en la 2ª):



Entonces, si la diferencia **1.216** se "reparte" equitativamente entre esos 16 cuadritos tendremos para cada uno de ellos: **1.216 : 16 = 76**. Luego el número menor (**d**) es **76**. Y el mayor (**D**) es **76 x 17 + 15 = 1.307**

g) Los tres hijos pagan: **16.300 – 4.600 = 11.700** pesos. Si dividimos esta cantidad por **450** obtendremos el total de años por los que se está pagando: **11.700 : 450 = 26**. La suma de las edades de los tres hijos es **26** años. Si la hija mayor tuviera **2 años menos**, esa suma sería de **24** años y equivaldría a **tres** veces la edad de los gemelos. Por consiguiente, la edad de éstos es **8** años, y la de la hija mayor, **10**.

h) Ya sabemos que este tipo de ejercicios requiere grandes dosis de observación y ensayo.

4	+		:		= 3
x		+		x	
	+		:		= 5
:		:		x	
	+		+		= 7
= 6		=3		= 8	

Aquí la guía inicial está en la primera fila y en la primera columna. En la primera fila puede haber varias alternativas: **4 + 2 : 2**; **4 + 5 : 3** (esta opción se desecha, ya que el producto de los tres factores de la tercera columna es **8**); etc. Análogamente, en la primera columna: **4 x 3 : 2**; **4 x 6 : 4**; etc. Y a partir de cada selección, ensayar valores para los cuatro espacios restantes. El resultado final es:

4	+	2	:	2	= 3
x		+		x	
3	+	7	:	2	= 5
:		:		x	
2	+	3	+	2	= 7
= 6		=3		= 8	

i) Evidentemente, para calcular el monto de la deuda en pesos, necesitamos saber el costo de un kilo de la mercancía que entra en la transacción. Para ello utilizamos la igualdad de los dos pagos. Así, **18** kg más **8.000** pesos equivalen a **25** kg menos **45.200** pesos.

De esa igualdad se desprende que **25 kg** de la mercancía equivalen, a su vez, a **18 kg**, más **8.000** pesos, más **45.200** pesos; es decir, **18 kg** más **53.200** pesos. Hay una nueva deducción: los **7 kg** de exceso del primer pago se compensan con los **53.200** pesos del segundo pago. Esto significa que cada kilo de mercancía vale: **53.200 : 7 = 7.600** pesos. De aquí se sigue que lo pagado a cada acreedor es: **18 x 7.600 + 8.000 = 144.800** pesos. Respuesta a la que se puede llegar también así: **25 x 7.600 – 45.200**.

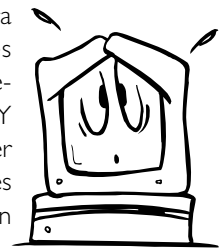
j) a. Para llegar de **32** a **0** podemos aplicar **16** veces seguidas la tecla **A**. Pero también podemos pulsar la tecla **B** y, al final, la tecla **A**:

(32)—B → (16)—B → (8)—B → (4) —B → (2)—A → (0)

b. Hay varios caminos posibles. Por ejemplo, aplicar **25** veces la tecla **A**. También puede ser llegar hasta **32** aplicando la tecla **A** y agregar después la secuencia anterior. O esta otra, quizá más breve:

(50)—A → (48)—B → (24)—B → (12)—B → (6)—A → (4)—B → (2)—A → (0)

c. Está claro que para los números impares no existe ninguna secuencia que lleve a **0**. Y también, que cualquier secuencia para los pares no puede terminar con la tecla **B**.



d. Se trata de reconstruir la secuencia de números provocada por **B B B A A A**:

(0)—A → (2)—A → (4)—A → (6)—B → (12)—B → (24)—B → (48)

7. La resolución de problemas que involucran las cuatro operaciones aritméticas

Para cerrar de momento el ciclo de las cuatro operaciones aritméticas básicas proponemos a nuestros lectores la resolución de los siguientes problemas. De nuevo les sugerimos que, una vez leído cada enunciado, intenten resolverlo por cuenta propia antes de revisar la vía de solución que se presenta posteriormente.

k) *La edad de una persona al morir era casualmente el cociente de dividir su año de nacimiento entre* ***31****. ¿Qué edad tenía esta persona en el año* ***1921****?*

l) **A** y **B** son dos números escogidos entre **1** y **45**, ambos inclusive, tales que su suma es **45**. ¿Cuál es el mayor valor posible de la expresión **A x B : (A – B)**?

m) *Acabo de perder el tren por un minuto. Pero si pasaran* ***3*** *trenes más cada hora tendría que esperar al próximo tren* ***1*** *minuto menos que lo que tengo que esperar ahora. Y a todo esto, ¿cuánto es lo que tengo que esperar ahora?*

n) Todos los números naturales desde **8** hasta **2.004** se dividen entre **7**. ¿Cuánto da la suma de los residuos de todas esas divisiones?

ñ) *Tenemos una gran hoja de papel cebolla, de* ***0,08*** *mm de espesor. Esta hoja se divide en* ***dos mitades*** *iguales que se colocan una encima de la otra. Este "bulto" se corta a su vez en* ***dos mitades*** *iguales que vuelven a colocarse una encima de la otra. Suponga que la operación se prosigue de manera similar hasta llegar a* ***15*** *veces desde el primer corte. ¿Cuál será el espesor del "bulto" que se obtendrá al final?*

o) En el lugar de las ? coloque cualquiera de los cuatro signos de las operaciones aritméticas de tal forma que se cumpla la igualdad propuesta en cada caso:

170 ? 17 ? 12 + 120 ? 97 = 143
25 ? 40 ? 125 + 255 ? 63 = 200

p) *Un tanque de agua tiene* ***dos*** *grifos. El primero lo llena en* ***10*** *minutos y el segundo en* ***media hora****. ¿En cuánto tiempo se llenará si se abren los dos grifos a la vez?*

q) Debía multiplicar **78** por un número de **dos** cifras, cuya cifra de las **decenas** es el **triple** de la de las **unidades**. Pero me equivoqué y multipliqué **78** por el número con las dos cifras cambiadas de posición. El producto obtenido así es **2.808 unidades** menor que el que debería haberse obtenido. ¿Cuál era este producto?

r) *Un comerciante compra* ***12*** *cajas de mercancía a* ***87*** *pesos cada una y vende* ***4*** *de ellas por un total de* ***380*** *pesos. ¿A cómo tendrá que vender cada una de las cajas restantes para que pueda obtener una ganancia de* ***156*** *pesos por la venta de las* ***12*** *cajas?*

s) Divida **45** en cuatro sumandos tales que si al **1º** le agrega **2**, al **2º** le resta **2**, al **3º** lo multiplica por **2**, al **4º** lo divide entre **2**, y vuelve a sumar estos cuatro nuevos números, obtiene otra vez **45**.

t) *Nueve cuadernos importados cuestan* ***11*** *dólares y algunos centavos;* ***13*** *cuadernos similares cuestan* ***15*** *dólares y algunos centavos. ¿Cuál es el valor, en dólares, de cada cuaderno?*

u) Escriba los números **pares** hasta el **12** utilizando cada vez **4 cuatros** y sirviéndose de los signos de las operaciones aritméticas, incluida la potencia (Vale escribir **dos** dígitos juntos para constituir **un solo** número de **dos dígitos**).

Una vez más, vamos a presentar algunas vías de solución con el fin de contrastarlas con las que hemos podido obtener entre todos.

k) De acuerdo con el enunciado, el número del año en que nace nuestro sujeto debe ser un múltiplo de **31** menor que **1921**. Al dividirse **1921 entre 31** se obtiene **61,97**. Esto nos sugiere multiplicar **31** por factores menores que **62** para obtener los posibles años de nacimiento: **31 x 61 = 1891**; **31 x 60 = 1860**; **31 x 59 = 1829**; no hay más casos verosímiles.

Si queremos saber el año de su muerte sumaremos cada factor variable a su correspondiente año de nacimiento. Así, tendríamos tres alternativas: **1891 + 61 = 1952**; **1860 + 60 = 1920**; **1829 + 59 = 1888**. Como se ve, deben rechazarse los dos últimos casos, pues en ellos el sujeto no llega a estar vivo en el año **1921**. Por consiguiente, nació en **1891** y en **1921** tenía **30** años.

l) Para que la expresión **A x B : (A – B)** tenga el mayor valor posible, nos interesa que el divisor sea lo más pequeño posible. Esto ocurre si **A** es **una unidad** mayor que **B**. Pero si, además, ambos deben sumar **45**, la única alternativa viable es **A = 23 y B = 22**. El valor buscado es **23 x 22 : (23 – 22) = 23 x 22 = 506**.

m) Podemos proceder por ensayo y ajuste, y así entender mejor el enunciado del problema. Supongamos que pasan **6** trenes cada hora, es decir, cada **10** minutos (**60 : 6 = 10**). En este caso, al agregar **3** trenes tendríamos **9** en servicio, que pasarían cada (**60 : 9 = 6,67**) **6 minutos y 40 segundos**. La reducción del tiempo entre cada paso de dos trenes consecutivos es de: **10 m – (6 m y 40 s) = 3 m y 20 s.** Pero esta reducción debe ser de **1** minuto, lo que nos lleva a rechazar nuestro valor inicial y a suponer que deben pasar más de 6 trenes cada hora.

El ensayo puede llevarse a otros valores (**7**, **8**, **9**, etc., trenes cada hora). La idea es que el número de trenes sea divisor de **60** (minutos de una hora) y que al agregar **3** a ese número, también se obtenga otro divisor de **60**. Esta situación se presenta con el número **12**. Efectivamente, si pasan **12** trenes cada hora, lo hacen cada (**60 : 12 = 5**) **5 minutos**. Si se agregan **3** trenes al servicio, los **15** resultantes pasarían cada (**60 : 15 = 4**) **4 minutos**, con lo que la espera se reduciría en **1** minuto. Como perdí el tren por **1** minuto, tengo que esperar **4** para montarme en el siguiente.

n) A partir de **8** hasta **14**, los restos de dividir estos números entre **7** son, respectivamente, **1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **6** y **0**; y su suma, **21**. Lo que nos interesa es saber cuántos grupos similares de **7** números hay desde **8** hasta **2.004**. Para ello buscamos primero cuántos números hay entre los dos dados, incluyéndolos a ambos: **2.004 – 8 + 1 = 1.997** números.

Al dividir esta cantidad entre **7** obtenemos como cociente **285** y como resto **2**. Esto significa que hay **285** grupos completos de los **7** restos cuya suma es **21**, y **dos** números cuyos restos son **1** y **2**. La suma total de los residuos es, pues: **285 x 21 + 1 + 2 = 5.988**.

ñ) En la siguiente tabla presentamos la información de lo que ocurre:

Operación	Pliegos de entrada	Pliegos de salida
1ª	1	$2 = 2^1$
2ª	$2 = 2^1$	$4 = 2^2$
3ª	$4 = 2^2$	$8 = 2^3$
4ª	$8 = 2^3$	$16 = 2^4$
…	…	…
15ª	2^{14}	2^{15}

Por consiguiente, al final del proceso el "bulto" tendrá un espesor de 2^{15} x 0,08 mm = $(2^5)^3$ x 0,08 mm = 32^3 x 0,08 = 32.768 x 0,08 mm = 2.621,44 mm = 2,62144 m. Es decir, aproximadamente la altura de una habitación.

o) En la primera expresión, 170 ? 17 ? 12 + 120 ? 97 = 143, el comienzo sugiere el signo : para el primer ? . Esto nos daría un cociente de 10, que debería multiplicarse por 12 para incrementar el resultado. Llegados a 120 y sumando 120 obtenemos 240, a lo que hay que restar 97 para terminar en 143. Así tenemos 170 : 17 x 12 + 120 – 97 = 143.

En la segunda expresión, 25 ? 40 ? 125 + 255 ? 63 = 200, la presencia del sumando 255, cercano al resultado final 200, sugiere que el aporte de las tres primeras cantidades debe ser pequeño. Una forma de lograr esto es multiplicar 25 por 40 y dividir el producto entre 125: el resultado es 8. El último ? debe ser el signo –. Así, 25 x 40 : 125 + 255 – 63 = 200.

p) Llamemos a los dos grifos A y B. Una forma de buscar la solución es plantearnos qué lograrían los dos grifos durante un determinado lapso, por ejemplo, durante una hora: el grifo A llenaría (60 : 10 = 6) 6 tanques iguales al dado y el grifo B, (60 : 30 = 2) 2 tanques. Así, pues, si operan los dos juntos, llenarían 8 tanques en una hora. Por consiguiente, para llenar uno solo tardarán 60 : 8 = 7,5 minutos, es decir, 7 minutos y 30 segundos. Hay otras formas de resolver este problema...

q) El factor desconocido sólo puede ser uno de éstos: 31, 62 ó 93. El factor equivocado podría ser, respectivamente, 13, 26 ó 39. La diferencia entre los productos verdadero y equivocado (2.808) debe venir de alguna de estas tres multiplicaciones:

78x31–78x13=78x(31–13)=78x18
78x62–78x26=78x(62–26)=78x36
78x93–78x39=78x(93–39)=78x54

Los factores correctos son los de la segunda alternativa: 78 x 36 = 2.808. Por consiguiente, el producto que debería haberse obtenido es 78 x 62 = 4.836.

r) Veamos primero cuál fue el costo de las 12 cajas: 12 x 87 = 1.044 pesos. Si quiere tener 156 pesos de ganancia, la venta deberá ascender a 1.044 + 156 = 1.200 pesos. Como ya ha obtenido 380 pesos por la venta de 4 cajas, la venta de las otras 8 deberá alcanzar el monto de 1.200 – 380 = 820 pesos. Para ello, cada una de estas cajas deberá venderse a 820 : 8 = 102,50 pesos.

s) Llamemos A, B, C y D a los sumandos ordenados del 1° al 4° y observemos bien el enunciado. Si a A se le suman 2 y a B se le restan 2, ambos números cambiarán, pero no su suma, que sigue siendo la de antes (verifíquelo con cualquier ejemplo). Y como lo que nos interesa es que la suma se mantenga en 45, en principio A y B no nos "molestan" mucho. Incluso, pueden tener más de un valor cada uno.

¿Qué pasa con C y D? D debe ser par, para poder proporcionar una mitad entera. Además, una forma de que ambos números tampoco nos "molesten" para conservar la suma, es que D sea el doble de C. Así, en la transformación, C se convertirá en su doble (D) y D en su mitad (C), y la suma de ambos números seguirá siendo la misma (verifíquelo con cualquier ejemplo).

De modo que hay muchas respuestas, siempre que C y D mantengan la relación sugerida. Por ejemplo: 13 + 5 + 9 + 18 pasa

a ser: **15 + 3 + 18 + 9; 3 + 6 + 12 + 24** pasa a ser: **5 + 4 + 24 + 12**; etc.

t) Si los **9** cuadernos costaran **11** dólares exactos, cada uno de ellos valdría **11 : 9 = 1,22** dólares. Análogamente, si los **13** cuadernos costaran **15** dólares exactos, cada uno de ellos valdría **15 : 13 = 1,15** dólares. Pero como cuestan algunos centavos más que las cantidades exactas, debemos inferir que cada cuaderno cuesta algo más que estos dos precios unitarios, es decir, algo más que **1,22** dólares.

Ensayemos con **1,23**. Los **9** cuadernos costarían **9 x 1,23 = 11,07** dólares; los otros **13** costarían **13 x 1,23 = 15,99** dólares. Esta es una respuesta posible y, además, la única, ya que si se pasa al precio unitario de **1,24** dólares, el lote de **13** pasaría de los **16** dólares (**13 x 1,24 = 16,12**).

u) He aquí algunas de las respuestas posibles:

0 = 4 + 4 – 4 – 4;	**(4 x 4) – (4 x 4)**
(4 x 4)/4 – 4;	**4 x 4 x (4 – 4)**
2 = 4/4 + 4/4;	**(4 x 4)/(4 + 4)**
4 – (4 + 4)/4;	**$4 = 4 \times 4^{4-4}$**
4 + (4 – 4)/4;	**4 + 4 x (4 – 4)**
6 = 4 + (4 + 4)/4;	**8 = 4 x (4 + 4)/4**
4/4 x (4 + 4);	**$(4 + 4)^{4/4}$**
4 + 4 + 4 – 4;	**10 = (44 – 4)/4**
12 = (44 + 4)/4;	**4 x (4 – 4/4)**

Terminamos esta parte dedicada a los problemas que involucran las operaciones aritméticas reiterando la reflexión que, sobre la forma en que los hemos abordado y resuelto, hicimos en los Cuadernos anteriores. He aquí algunas conclusiones, que seguramente compartimos:

1. El método de *tanteo razonado* (ensayo y ajuste) sigue mostrándose como muy eficiente. Como decíamos, es un método científico excelente, que nos acostumbra a formular hipótesis razonables –ajustadas a las condiciones de la situación– y a verificarlas en la práctica. Todo esto refleja un proceso permanente de toma de decisiones, así como de control sobre la propia actividad.

2. La valoración del método de tanteo razonado no debe excluir la consideración y práctica de *otros métodos* a la hora de resolver problemas. Por ejemplo, algunos de los problemas que acaban de trabajarse podían haberse planteado y resuelto por la vía algebraica, es decir, utilizando incógnitas y ecuaciones.

3. Nunca insistiremos demasiado acerca del valor de la *observación*: observar el enunciado de la situación, las condiciones que afectan a las variables o a los datos numéricos, los casos posibles, las hipótesis que formulamos, los resultados parciales que vamos obteniendo...

4. Otro punto que destacar es la presencia de ciertas *herramientas* auxiliares que facilitan la consideración de los datos del problema o de los que se van obteniendo durante su resolución: nos referimos al uso de *tablas*, *gráficas*, etc.

8. La división en el aula

No pretendemos dar una prescripción didáctica relativa a cómo desarrollar la enseñanza de la división, sino tan sólo destacar algunos puntos que nos parecen de mayor interés:

• Al trabajar con la división debe buscarse también la consolidación de los aprendizajes de la multiplicación, ya que ambas operaciones son como los dos polos de la estructura multiplicativa que debe construir el aprendiz.

• Es importante destacar el carácter conceptual de la división como resta reiterada y como inversa de la multiplicación. Como se ha visto, hay ejercicios y problemas adecuados a este fin.

• Hay que recalcar también la importancia de la adquisición y desarrollo de destrezas sobre la base de la observación de las regularidades presentes en la división.

• Es fundamental la comprensión de los cocientes de las diversas unidades, enteras y decimales, del sistema de numeración decimal.

• Se debe reforzar el sentido del algoritmo de la división. Esto puede lograrse mediante el recurso al proceso de reparto de billetes de denominación decimal.

• El desarrollo del cálculo mental y de la resolución de problemas debe figurar como una actividad permanente.

• No debe insistirse en la resolución de divisiones con cantidades de muchas cifras enteras o decimales. En estos casos puede estimarse el cociente y utilizar la calculadora para validar el resultado.

9. Y ahora, otros ejercicios "para la casa"...

11. *Un tren de kilómetro y medio de longitud viaja a una velocidad de* ***30*** *km/h. ¿Cuánto tiempo tardará en atravesar un túnel de* ***kilómetro y medio*** *de largo?*

12. La señora Antonia compró un lote de caramelos a razón de **270** pesos por cada **9** caramelos y los vendió a razón de **10** caramelos por **800** pesos. Al venderlos todos obtiene una ganancia de **21.000** pesos. ¿Cuántos caramelos compró?

13. *Una prueba comienza a las* ***8.25 a.m.*** *y debe terminar a las* ***9.55 a.m.*** *Si ha transcurrido* ***la quinta parte*** *del lapso previsto, ¿qué hora es?*

14. En una ferretería, **1** cuesta **2.500** pesos y **918** cuesta **7.500** pesos. ¿Qué se está comprando?

15. *Una persona ha vivido hasta ahora* ***44*** *años,* ***44*** *meses,* ***44*** *semanas,* ***44*** *días y* ***44*** *horas. ¿Cuántos años y meses cumplidos tiene?*

16. María compra **tres** piezas de la misma tela, en distintos momentos pero al mismo precio. El costo de la primera pieza fue de **31,05** pesos; la segunda, que tenía **5** metros más que la primera, costó **36,80** pesos; y la tercera, **85,10** pesos. ¿Cuántos metros de tela ha comprado en total?

17. *Si en cada autobús caben* ***40*** *estudiantes, ¿cuántos autobuses se necesitarán para transportar simultáneamente a los* ***736*** *alumnos de la escuela?*

En un juego de billar hay **27** bolas, **26** de las cuales son de igual peso y **una** es más pesada. Si se dispone de una balanza sin pesas, explique cómo determinaría esa última bola con sólo tres pesadas en la balanza.

18. *¿En qué columna de la siguiente distribución numérica estará el número* ***2.305****?*

A	B	C	D	E	F	G
0	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14 …….....						

19. Complete las casillas del siguiente cuadro:

	x		-		= 9
:		+		-	
	+		:		= 3
+		-		+	
	x		:		= 6
= 7		=4		= 9	

20. *Un número de* ***6*** *dígitos empieza (por la izquierda) por* ***1****. Si este dígito se quita de su lugar y se lleva a la posición de las unidades, el número que se obtiene es el* ***triple*** *del número original. ¿Cuál es este número?*

21. La edad de Juan es el **cuádruplo** de la de René y dentro de **10** años será el **triple**. ¿Cuántos años tiene Juan ahora?

22. *Se puede observar que* ***1.996 = 4 x 499****. ¿Cuáles de los siguientes números:*
1.908 1.952 2.299 2.500 *pueden obtenerse mediante un producto de dos números de la forma* ***a x abb****?*

23. Hallar el número cuyo **quíntuplo** disminuido en **17** es igual a su **triple** aumentado en **41**.

24. *Un grupo de estudiantes, entre los que hay* ***4*** *chicas, está merendando. El costo total de la merienda es de* ***12.000*** *pesos y todos consumen lo mismo. Si las chicas no pagan, los chicos deben pagar* ***500*** *pesos más cada uno. ¿Cuántos estudiantes están merendando?*

25. Observe las siguientes expresiones:
2 + 2 = 5 8 – 7 = 0 4 x 4 = 24
7 : 1 = 3 $1^3 = 15$

Ninguna de ellas es correcta, pero si a todos los números implicados se les aplica la misma transformación aritmética, todas las expresiones se tornarán correctas. ¿De qué transformación se trata?

26. *Un campesino sembró* ***34*** *hileras de maíz, con* ***15*** *huecos en cada hilera y* ***3*** *semillas en cada hueco. Si sólo germina la mitad de las semillas sembradas, ¿cuántas plantas de maíz obtiene?*

27. ¿Por qué número hay que multiplicar **76** para obtener un producto de **4 dígitos** que acabe también en **76**?

28. *¿En qué caso el producto de dos factores positivos es, a la vez, mayor que uno de los factores y menor que el otro?*

29. Escriba los números impares hasta el **9** utilizando cada vez **4 cuatros** y sirviéndose de los signos de las operaciones aritméticas, incluida la potencia. (Vale escribir dos dígitos juntos para constituir un solo número de dos dígitos).

30. *Un perro persigue a un conejo que le lleva una ventaja equivalente a* ***50*** *saltos de conejo. Si un salto del perro equivale a* ***3*** *del conejo, y si el conejo da* ***8*** *saltos mientras el perro da* ***3****, ¿en cuántos saltos alcanza el perro al conejo?*

31. Tres niños están jugando. En cada jugada, **uno** pierde y **dos** ganan. Los que ganan **doblan** el puntaje que traían y el que pierde resta a su puntaje la suma de los puntajes que traían los dos ganadores. Después de **tres** jugadas, cada jugador ha ganado **dos** veces y ha perdido **una**. Al final, los tres tienen **40** puntos. ¿Cuántos puntos tenía cada uno al comienzo del juego?

32. ***A, B y C*** *son tres números diferentes cuya suma es* ***28****. Si* ***A*** *es la tercera parte de la suma de* ***B*** *y* ***C****, ¿cuánto suman estos dos últimos?*

33. Utilizando la calculadora divido **9.307 : 146** y leo en la pantalla **63,7465**. Pero no me interesan los decimales sino el resto de la división entera. ¿Cómo lo obtengo?

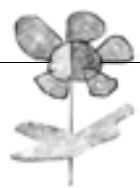
Referencias bibliográficas

- Maza G., C. (1991). *Enseñanza de la multiplicación y la división*. Madrid: Síntesis.

- Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad. Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. México: Trillas.

Respuestas de los ejercicios propuestos

1. 29 de abril **2.** 96 **3.** 25 monedas **4.** 1ª fila: 6, 3, 2; 2ª fila: 8, 5, 6; 3ª fila: 7, 9, 9 **5.** 9 años **6.** 71 **7.** Caja B **8.** 5 desagües **9.** Columna D **10.** 3 aviones **11.** 6 minutos **12.** 420 caramelos **13.** 8.43 a.m. **14.** Los tres números: 1, 8 y 9 **15.** 48 años y 7 meses **16.** 133 metros **17.** 19 autobuses **18.** Columna C **19.** 1ª fila: 3, 5, 6; 2ª fila: 1, 8, 3; 3ª fila: 4, 9, 6 **20.** 142.857 **21.** 80 años **22.** 1.908 = 4 x 477; 1.952 = 4 x 488; 2.500 = 5 x 500; 2.299, no **23.** 29 **24.** 12 estudiantes **25.** Agregar 1 unidad a cada número **26.** 765 plantas **27.** 26, 51, 76, 101 ó 126 **28.** Un factor > 1 y el otro < 1 **29.** $1 = (4/4)^{4-4}$; $3 = 4 - 4^{4-4}$; $5 = 4 + 4^{4-4}$; $7 = 4 + 4 - 4/4 = 44/4 - 4$; $9 = 4 + 4 + 4/4$ **30.** 150 saltos **31.** Jugador que pierde la 1ª jugada: 65; jugador que pierde la 2ª jugada: 35; jugador que pierde la 3ª jugada: 20 **32.** 21 **33.** 109; resto a 9.307 el producto de 63 x 146



Post data.-

Divide (bien) y vencerás

Índice

A modo de introducción 5

Capítulo I
¿Qué es la división de números naturales? 6

Capítulo II
El desarrollo de destrezas para dividir 9
2.1. Relaciones entre los cuatro términos de la división 10
2.2. Expresiones equivalentes 10
2.3. Otras relaciones y regularidades 11

Capítulo III
La división en el sistema de numeración decimal 14
División entera (exacta y no exacta) 14
División con decimales 16

Capítulo IV
Estimar el cociente de una división 19

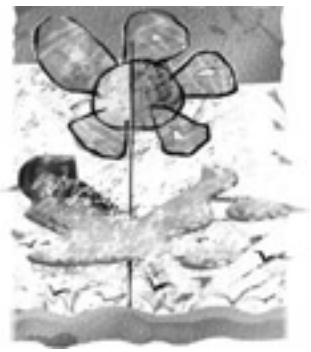
Capítulo V
Tengo ante mí una situación de división; y ahora, ¿qué hago? 19

Capítulo VI
La resolución de problemas de división 20

Capítulo VII
La resolución de problemas
que involucran las cuatro operaciones aritméticas 24

Capítulo VIII
La división en el aula 27

Capítulo IX
Y ahora, otros ejercicios "para la casa"… 28



Este libro se terminó de imprimir
en el mes de febrero de 2006.